

# Vereenvoudigde berekening van stijve raamspanten

door F. C. van Erp

De berekening van stijve raamspanten biedt, óók voor de praktische uitvoering, met de methode van Prof. H. Cross geen principiële moeilijkheden meer. Toch is men geneigd te streven naar een nog eenvoudigere werkwijze, desnoods ten koste van de volmaakte nauwkeurigheid, die de methode van Cross kan bieden.

Het is tenslotte zéér problematisch, welke graad van nauwkeurigheid t.a.v. dwarskrachten en momenten voor bijvoorbeeld een betonskelet, deel uitmakend van een gebouw, gewenst is om tot een juiste dimensionering en wapening te komen. We behoeven daarbij slechts aan het volgende te denken:

gewapend beton is een niet-homogeen materiaal, er zijn stortvoegen nodig,

in de zijdelingse verplaatsingen, die de knooppunten ondergaan, kunnen verstoringen optreden t.g.v. de aanwezigheid van trappenhuisen, liftschachten, tussenwanden, koppevels, enz.

Bovendien zijn de belastingen vaak aangenomen (windbelasting!) evenals vele soortelijke gewichten; zij blijken later niet in overeenstemming met de realiteit. Voor de bepaling van de wapening is dus het slechts voor bepaalde praemissen geldende, theoretisch zuivere rekenkundige resultaat niet alléén doorslaggevend. Elke constructie dient tenslotte op haar eigen specifieke mérites te worden bekeken; op grond daarvan moet een oordeel worden gevormd over de gewenste graad van nauwkeurigheid van de berekening. De opmerking op blz. 26 in 'Die Berechnung mehrstöckiger Rahmen' door G. Kani:

'Bssitzt man also bequeme Berechnungsmethoden, mit welchen die Knotenverschieblichkeit berücksichtigt werden kann, so ist es wirklich unzulässig, die Knoten als unverschieblich vorauszusetzen',

is, in de algemene vorm waarin zij gesteld is, niet juist. Ware zij dit wel, dan was de berekening op zichzelf doel, inplaats van een hulpmiddel om tot een goede constructie te komen.

In dit verband mag nog worden gewezen op het artikel 'De veiligheidscoëfficiënt bij gewapend-betonconstructies' van Dipl.-Ing. L. Kellermann in Cement 4 (1952) Nr 19-20.

In 1949 publiceerde G. Kani zijn boven reeds genoemde werk, waarin hij een buitengewoon knap gevonden methode ontwikkelde om stijve raamspanten te berekenen. Deze methode betekent t.o.v. de methode Cross vaak een aanzienlijke besparing van cijferwerk, indien er sprake is van zijdelingse verplaatsing van knooppunten. Indien de knooppunten wel een draaiing, doch géén verplaatsing kunnen ondergaan, wordt de hoeveelheid cijferwerk minder beperkt.

Er is door mij gezocht naar een mogelijkheid ook in dit laatste geval te komen tot eenvoudiger cijferwerk. Door het opstellen van enige formules meen ik hierin geslaagd te zijn. De formules zijn van tweeërlei aard én kunnen voor verschillende doeleinden worden gebruikt:

- In tek. 4 zijn sterk benaderde waarden aangegeven voor de zgn. draaiingsinvloeden, die voorkomen bij de methode Kani en daar worden bereikt door iteratie. Zij bieden de mogelijkheid de Kani-bewerking te bekorten. Zij kunnen namelijk hierin worden ingeschakeld, indien een exact eindresultaat wordt vereist, ofwel zij kunnen op zichzelf worden gebruikt, indien met een benaderd eindresultaat genoegen genomen kan worden.
- De form. (5) t/m (15) zijn benaderingsformules, die ineens benaderende waarden voor de eindmomenten van een raamspant leveren.

Daar een ligger, doorlopend over meer dan twee steunpunten kan worden opgevat als een bijzondere vorm van een stijf raamspant, kunnen de formules ook voor een zodanige ligger worden toegepast.

Alleen moet als beperking worden gesteld, dat de formules van de categorieën A en B gelden voor een raamspant (resp. ligger), waarvan slechts één veld wordt belast, terwijl zijde-

lingse verplaatsing van knooppunten buiten beschouwing wordt gelaten.

Ondanks deze beperking kunnen de formules een besparing aan cijferwerk bewerkstelligen. Men moet immers, om de wapening van een stijf raamwerk te bepalen, de berekening zo vele malen herhalen als er regels zijn, die nuttige belasting te dragen kunnen krijgen, terwijl de overige nuttige belasting afwezig is en vervolgens, in samenwerking met de belasting door eigen gewicht, de ongunstigste spanningscombinaties vaststellen.

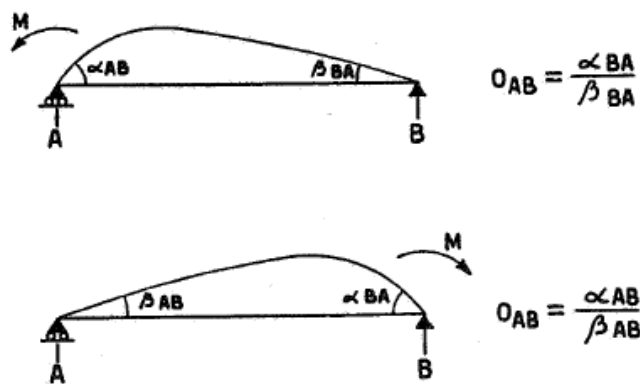
Ook indien zijdelingse verplaatsingen van knooppunten kunnen optreden en daardoor spanningsafwijkingen van betekenis te verwachten zijn, zodat een berekening hiervoor noodzakelijk wordt geacht (dit, is lang niet met alle raamwerken het geval, die in principe enige verplaatsing zullen opleveren!), kunnen de formules betekenis hebben. Het is immers mogelijk, dat door een of andere oorzaak, zoals de aanwezigheid van scheidingsmuren, niet gelijktijdige nuttige belasting op de naast gelegen raamwerken, enz., de verschuivingen worden beperkt of geheel verhinderd, zodat de spanningen toch ook gecontroleerd dienen te worden voor het geval deze verplaatsingen inderdaad niet tot stand komen. Bovendien moeten, als de invloed van de verschuiving wel in rekening wordt gebracht, toch eerst benaderd de draaiingsinvloeden worden bepaald, voordat de verschuivingsinvloeden in aanmerking genomen kunnen worden en de formules sub A leveren ook in dit geval waarden, die vaak niet veel van de gezochte eindwaarden verschillen (uiteraard afhankelijk van grootte en richting van de optredende verplaatsing).

De toepassing voor liggers, doorgaand over meer dan twee steunpunten, biedt een besparing aan cijferwerk, zodat dit aanleiding kan zijn de in de Gewapend Beton Voorschriften (G.B.V. 1950) voorgeschreven momentenwaarden in sommige gevallen te vervangen door juistere waarden. De G.B.V. bieden namelijk de mogelijkheid tot afwijking van de door haar genoemde momentenwaarden, mits één en ander door berekening kan worden aangetoond. Daardoor is de situatie ontstaan, dat vaak heel belangrijke onderdelen van een constructie exact worden berekend en minder belangrijke door middel van de G.B.V.-coëfficiënten worden bepaald. De typische consequentie hiervan is, dat de belangrijke onderdelen worden geconstrueerd op een minimumbasis, terwijl de onbelangrijke onderdelen worden bepaald volgens vrij grove, vaak naar boven afgeronde, momentenwaarden.

## Afleiding formules voor stijve raamspanten

ad A

Voor de hieronder af te leiden formules, wordt de methode Kani benevens de theoretische beschouwing, waarop deze berust, bekend verondersteld. □□□. 1 toont de aan te houden notaties (in principe is steeds gedacht aan staven met veranderlijk traagheidsmoment).



De verdeelcoëfficiënt van een staaf AB in knooppunt A is:

$$a = \frac{K_{AB}}{K_{AB} + K_{AC} + K_{AD} + K_{AE}}$$

Voor de verdelingscoëfficiënten van een knooppunt A geldt:

$$a_{AB} + a_{AC} + a_{AD} + a_{AE} = 1$$

1) Zie voor boekbespreking Cement 6 (1954) nr 17-18, blz. 309 (Red.)

Bij de methode Kani worden via een reeksontwikkeling zgn. draaiingsinvloeden gezocht, die het mogelijk maken de eindmomenten te berekenen. Het streven is nu, aan de reeks een algemene vorm te geven, om er daarna de limietwaarde van te bepalen.

In tek. 2 is een knooppunt *A* aangegeven, waarin de staven *AB*, *AC*, *AD* en *AE* samenkomen. Bij de staafenden *B*, *C*, *D* en *E* bevinden zich volledige inklemmingen. De ingeschreven letters *a*, *c*, *d* en *e* geven de verdelingscoëfficiënten aan. Nu wordt op knooppunt *A* een moment aangebracht, groot  $+M$ . Het  $+$  teken van het moment is in overeenstemming met de gebruikelijke Cross-notatie en duidt aan, dat het moment werkt in de richting van de uurwerkwijzers (Kani voert hier een  $-$  teken in, doch dat leidt allicht tot verwarring). De draaiingsinvloeden  $D_{AB}$ ,  $D_{AC}$ ,  $D_{AD}$  en  $D_{AE}$  worden nu respectievelijk  $-aM$ ,  $-cM$ ,  $-dM$  en  $-eM$ .

Indien in tek. 2 bij punt *B* niet een volledige inklemming aanwezig was geweest, doch slechts een gedeeltelijke inklemming, zouden de draaiingsinvloeden andere eindwaarden hebben verkregen. Dit blijkt uit tek. 3, waar de volledige inklemming van punt *A* is vervangen door de gedeeltelijke inklemming, die wordt veroorzaakt door de stijfheid van het knooppunt van de staven *BA*, *BF*, *BG* en *BH*. Op knooppunt *A* wordt weer een moment aangebracht groot  $+M$ , waarna de draaiingsinvloeden bij *AB* en *BA* volgens de methode Kani worden ingeschreven. De meetkundige reeks, welke nu ontstaat, wordt aangeduid met  $R$ , zodat de eindwaarden van de overige staafenden eveneens kunnen worden genoteerd. De limietwaarde van de som van de termen van de meetkundige reeks bedraagt  $\frac{1}{1-ab}$  zodat

de draaiingsinvloeden van de staafenden (aangeduid met  $D_{AB}$ ,  $D_{BA}$  enz.) de eindwaarden krijgen:

$$(1) \dots\dots\dots D_{AB} = -aM \times \frac{1}{1-ab}$$

$$(2) \dots\dots\dots D_{BA} = +abM \times \frac{1}{1-ab}$$

terwijl:

$$D_{AB} : D_{AC} : D_{AD} : D_{AE} = a : c : d : e$$

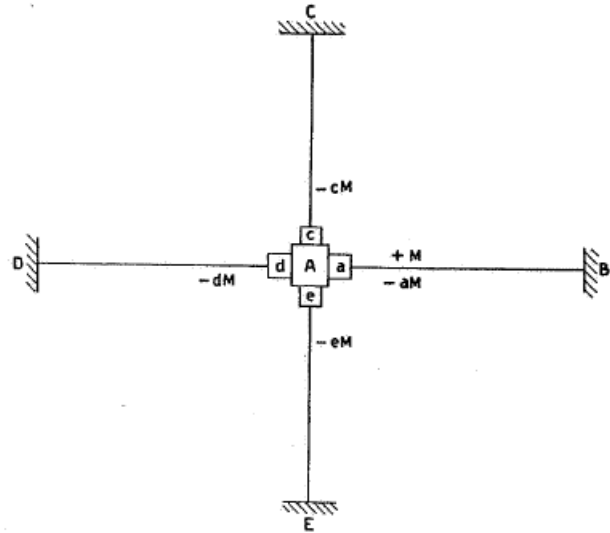
en

$$D_{BA} : D_{BF} : D_{BG} : D_{BH} = b : f : g : h$$

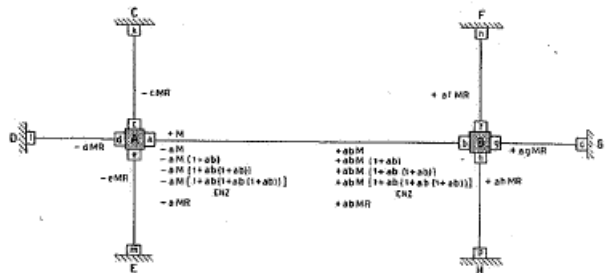
Worden alle volledige inklemmingen van tek. 1 vervangen door gedeeltelijke inklemmingen, gevormd door de stijfheid van daar aanwezige knooppunten, dan ontstaat tek. 4.

Op volkomen analoge wijze als voor tek. 3 kunnen de verschillende draaiingsinvloeden worden bepaald, die ontstaan door het aanbrengen van een moment  $+M$  op punt *A* van regel *AB*; in tek. 4 zijn deze genoteerd. Ter vereenvoudiging in de notatie is gesteld:

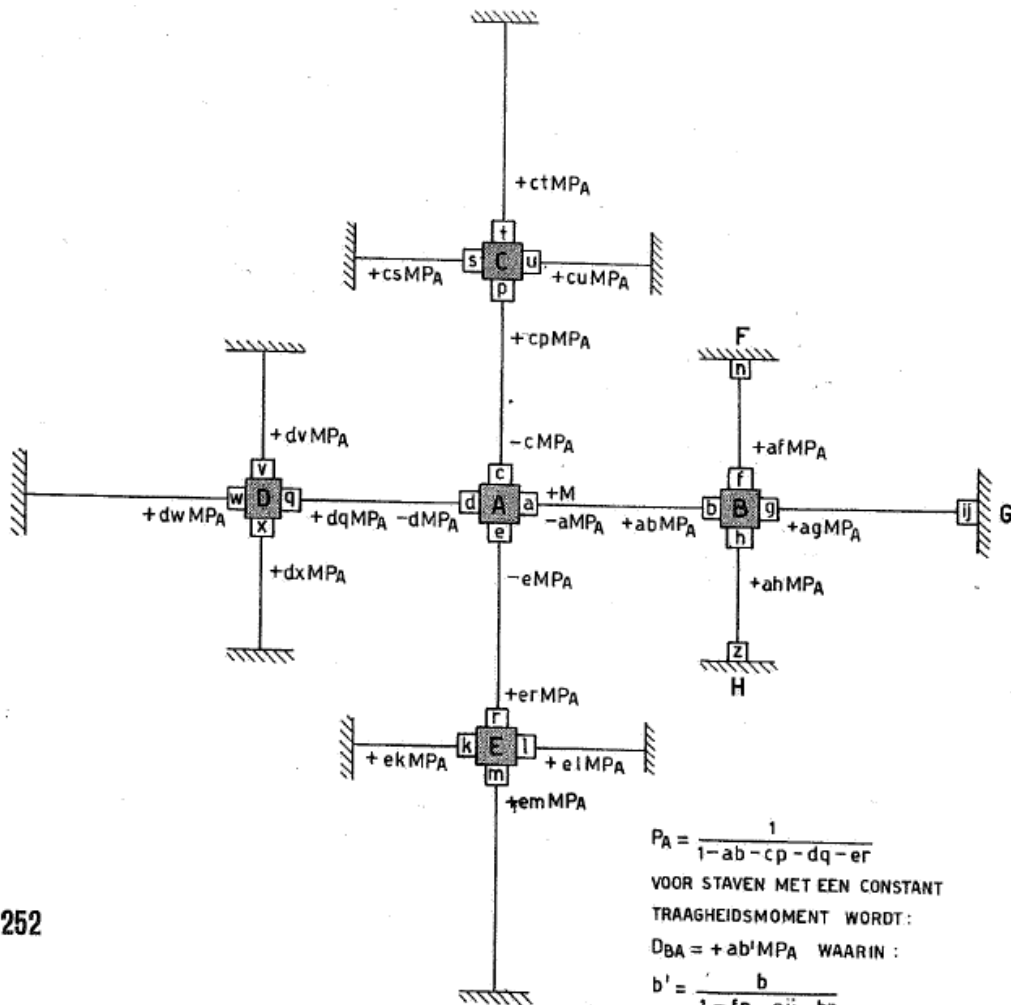
$$P_A = \frac{1}{1-ab-cp-dq-er}$$



tek. 2



tek. 3



$$P_A = \frac{1}{1-ab-cp-dq-er}$$

VOOR STAVEN MET EEN CONSTANT TRAGHEIDSMOMENT WORDT:

$D_{BA} = +ab'M_P_A$  WAARIN:

$$b' = \frac{b}{1-fn-gj-hz}$$

tek. 4

Hiermee zijn formules ontstaan, die gebruikt kunnen worden om ineens sterk benaderde eindwaarden te leveren voor de draaiingsinvloeden  $D_{AB}$  en  $D_{BA}$  van een belaste ligger  $AB$ , die deel uitmaakt van een stijf raamspant. De benadering bestaat hieruit, dat in een raamspant bij de punten van tek. 4, waar nu volledige inklemmingen zijn verondersteld, weer gedeeltelijke inklemmingen of scharnierpunten aanwezig kunnen zijn, terwijl bovendien de punten  $A$  en  $B$  slechts rechtstreeks invloed op elkaar uitoefenen via staaf  $AB$ , hetgeen in de meeste spanten niet het geval zal zijn. De grootte van de aldus ingevoerde onnauwkeurigheid is echter gering en bedraagt in extreme gevallen maximaal ca 2% voor  $D_{AG}$ ; voor  $D_{BA}$  is de onnauwkeurigheid groter.

Indien alle regels en stijlen een constant traagheidsmoment bezitten, worden alle  $O$ -waarden (zie tek. 1) aan elkaar gelijk, namelijk  $O_{AG} = 2 = O_{BA} = O_{AG}$ , enz. Tevens is het in dit geval mogelijk een correctie in te voeren, die tot een aanzienlijk geringer foutenpercentage voor  $D_{GA}$  leidt, zoals uit de volgende beschouwing blijkt. Werktop ligger  $WVX$  van tek. 5 bij punt  $W$  Keen primair moment  $-M$  dan wordt met (1) en (2):

$$D_{VW} = \frac{+0,5 M}{1-0,5 w} \text{ en } D_{WV} = \frac{-0,5 w M}{1-0,5 w}$$

$$M_{VW} = 2 \times \frac{0,5 M}{1-0,5 w} - \frac{0,5 w M}{1-0,5 w} = + M \text{ (daar bij punt } V \text{ een scharnier aanwezig is.)}$$

$$M_{WV} = 2 \times \frac{-0,5 w M}{1-0,5 w} + \frac{0,5 M}{1-0,5 w} = \frac{0,5-w}{1-0,5 w} \times M$$

De momentenlijn voor veld  $VW$  wordt als in tek. 5. Hierin geldt:

$$m = \frac{L}{1 + \frac{0,5-w}{1-0,5 w}} = \frac{(1-0,5 w) \cdot L}{1,5-1,5 w} \text{ ; dus:}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} EI = -Mx = M - M \frac{x}{L} \times \frac{1,5-1,5 w}{1-0,5 w}$$

$$\frac{dy}{dx} EI = Mx - \frac{Mx^2}{2L} \times \frac{1,5-1,5 w}{1-0,5 w} + C_1$$

$$y EI = \frac{Mx^2}{2} - \frac{Mx^3}{6L} \times \frac{1,5-1,5 w}{1-0,5 w} + C_1 x + C_2$$

Voor  $x = 0$  en  $y = 0$  wordt:

$$C_2 = 0$$

Voor  $x = L$  en  $y = 0$  wordt:

$$C_1 = \frac{ML}{6} \times \frac{1,5-1,5 w}{1-0,5 w} - \frac{ML}{2}$$

Dus voor  $x = 0$  geldt:

$$\varphi_V = \frac{dy}{dx} = \frac{ML}{6 EI} \times \frac{1,5-1,5 w}{1-0,5 w} - \frac{ML}{2 EI} = \frac{-ML}{4(1-0,5 w) EI}$$

Bij volledige inklemming in  $W$  is:

$$\varphi_W = \frac{-ML}{4 EI} \text{ . Hieruit volgt:}$$

$$\frac{K \text{ gedeeltelijke inklemming}}{K \text{ volledige inklemming}} = 1 - 0,5 w$$

Indien dit wordt toegepast in tek. 5, dan betekent dit, dat als bij  $T$  niet een volledige inklemming aanwezig is, doch een gedeeltelijke, waardoor factor  $t \neq 0$ , de verdelingscoëfficiënt van staaf  $WT$  in punt  $W$  de waarde krijgt:

$$(3) \dots \dots \dots (0,5-w)(1-0,5 t)$$

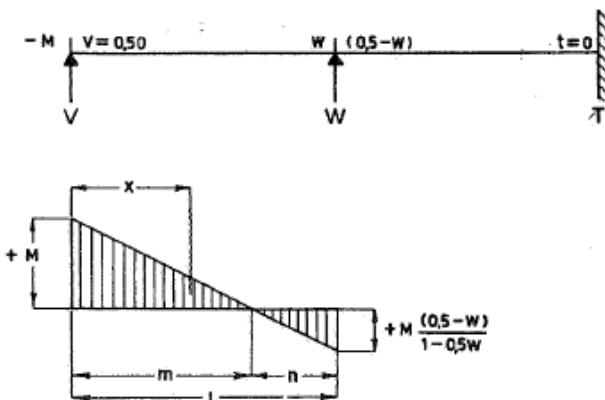
Daar de som van de verdelingscoëfficiënten bij punt  $W$  gelijk aan 0,50 moet blijven, moet ook de verdelingsfactor van staaf  $WV$  in  $W$  een correctie ondergaan en de waarde aannemen:

$$w' = \frac{w \times 0,50}{w + (0,5-w)(1-0,5 t)}$$

Daardoor wordt in tek. 5:

$$M_{WV} = \frac{1-0,5 w'}{0,5-w'} \times M$$

tek. 5



hetgeen kan worden herleid tot:

$$(4) \dots \dots \dots M_{WV} = \frac{(0,5-w)(1-0,5 t)}{0,75 + (0,5-w)(0,5-t)} \times M$$

Toegepast op tek. 4 blijkt het nu mogelijk de verdelingsfactor  $b$  bij punt  $B$  te vervangen door  $b'$ , waarin de invloed tot uiting komt van de gedeeltelijke inklemmingen der punten  $F$ ,  $G$ , en  $H$  die gesteld worden in plaats van de oorspronkelijke aangenomen volledige inklemmingen. De factoren  $f$ ,  $g$  en  $h$  kunnen namelijk volgens (3) resp. worden vervangen door  $f(1-0,5 n)$ ,  $g(1-0,5 y)$  en  $h(1-0,5 z)$ . Daar de som van de verdelingsfactoren in punt  $B$  gelijk 0,50 moet zijn, wordt:

$$b' = \frac{0,50 b}{b + f(1-0,5 n) + g(1-0,5 y) + h(1-0,5 z)}$$

$$b' = \frac{b}{1 - fn - gy - hz}$$

In tek. 4 is alleen bij punt  $A$  een primair moment gedacht, doch meestal zal bij belasting van regel  $AB$  ook in punt  $B$  een primair moment aangrijpen. In dat geval verdient het, indien er sprake is van constante traagheidsmomenten, aanbeveling de verdelingsfactor  $b$  te vervangen door  $b'$ , daar nu ook de draaiingsinvloeden rond punt  $B$  slechts een fout kunnen opleveren van maximaal ca 2%. De optredende fouten in de eindmomenten zijn nog geringer.

ad B

Om te komen tot formules, die ineens een sterk benaderde waarde leveren voor de in een stijf raamspant optredende eindmomenten, kunnen de draaiingsinvloeden van tek. 4 worden gesommeerd, waaruit blijkt:

$$M_{AB} = + M - O_{AB} a M_{PA} + ab M_{PA} = + M \{ 1 - a(O_{AB} - b) P_A \}$$

$$M_{AC} = - O_{AC} c M_{PA} + cp M_{PA} = - c M (O_{AC} - p) P_A$$

$$M_{AD} = - O_{AD} d M_{PA} + dq M_{PA} = - d M (O_{AD} - q) P_A$$

$$M_{AE} = - O_{AE} e M_{PA} + er M_{PA} = - e M (O_{AE} - r) P_A$$

$$M_{BA} = + O_{BA} ab M_{PA} - a M_{PA} = - a M (1 - O_{BA} b) P_A$$

$$M_{CA} = - c M_{PA} + O_{CA} cp M_{PA} = - c M (1 - O_{CA} p) P_A$$

$$M_{DA} = - d M_{PA} + O_{DA} dq M_{PA} = - d M (1 - O_{DA} q) P_A$$

$$M_{EA} = - e M_{PA} + O_{EA} er M_{PA} = - e M (1 - O_{EA} r) P_A$$

$$M_{EA} = - e M (1 - O_{EA} r) P_A$$

Deze betrekkingen worden nu op andere wijze geschreven, zodat ze een vorm aannemen, die zich goed voor becijfering leent. Aldus wordt:

$$(5) \dots \dots M_{AB} = + M \{ 1 - a(O_{AB} - b) P_A \}$$

$$(6) \dots \dots M_{AC} = - M_{AB} \times \frac{c(O_{AC} - p) P_A}{1 - a(O_{AB} - b) P_A}$$

$$(7) \dots \dots M_{AD} = - M_{AB} \times \frac{d(O_{AD} - q) P_A}{1 - a(O_{AB} - b) P_A}$$

$$(8) \dots \dots M_{AE} = - M_{AB} \times \frac{e(O_{AE} - r) P_A}{1 - a(O_{AB} - b) P_A}$$

$$(9) \dots \dots M_{BA} = - a M (1 - O_{BA} b) P_A$$

$$(10) \dots \dots M_{CA} = + \frac{1 - O_{CA} p}{O_{AC} - p} \times M_{AC}$$

$$(11) \dots \dots M_{DA} = + \frac{1 - O_{DA} q}{O_{AD} - q} \times M_{AD}$$

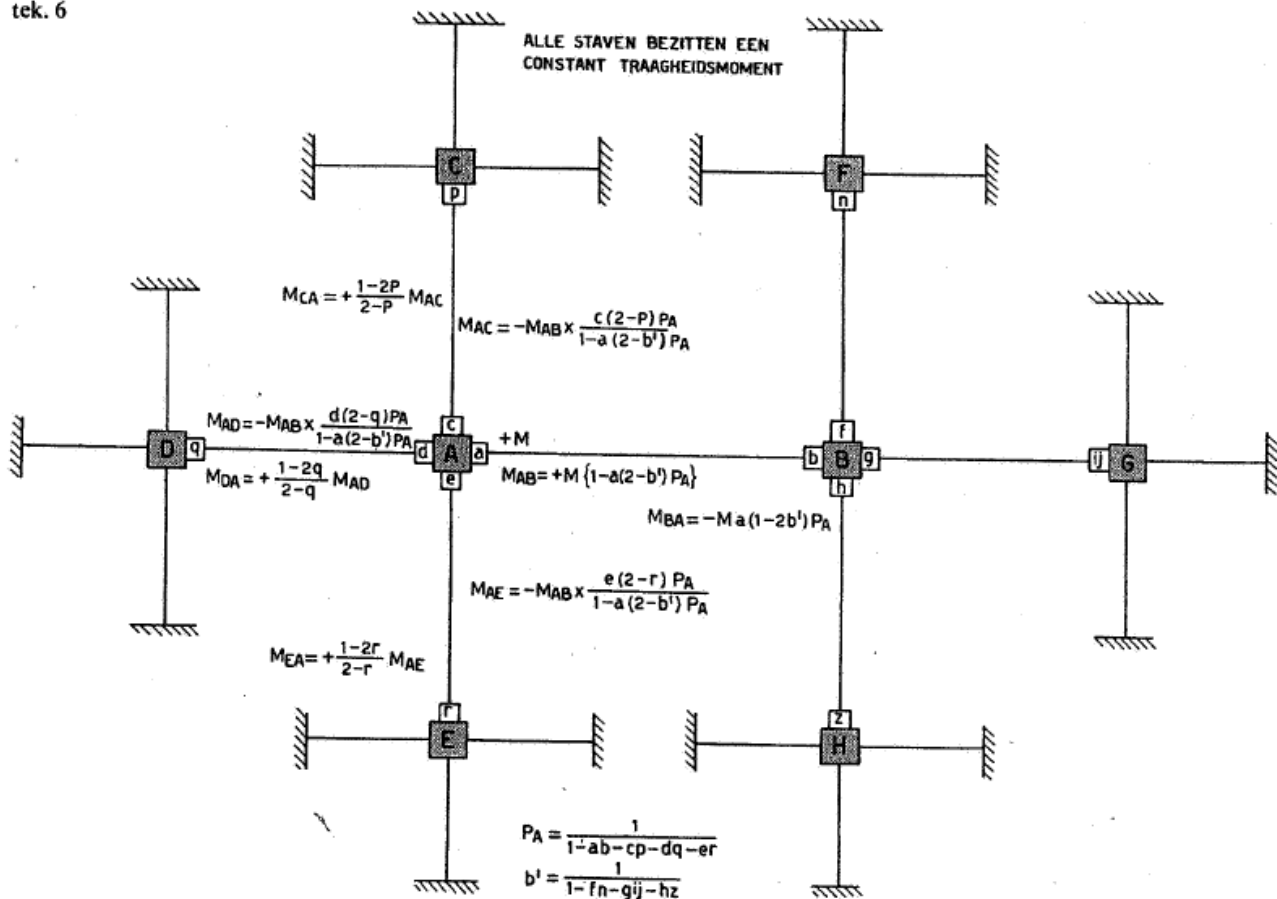
$$(12) \dots \dots M_{EA} = + \frac{1 - O_{EA} r}{O_{EA} - r} \times M_{AE}$$

Hiermede zijn algemeen geldende benaderingsformules, ontstaan, die aangeven, hoe een moment in een knooppunt wordt verdeeld over de daar samenkomende staven. Ook de momenten in punt  $B$  bijvoorbeeld kunnen zo worden vastgesteld. Indien men voor een berekening kan volstaan met een grovere benadering van de momentenwaarden, kunnen (6), (7) en (8) worden teruggebracht tot:

$$(13) \dots \dots M_{AC} = \frac{c}{0,5-a} M_{AB}$$

$$(14) \dots \dots M_{AD} = \frac{d}{0,5-a} M_{AB}$$

$$(15) \dots \dots M_{AE} = \frac{e}{0,5-a} M_{AB}$$



Meestal is dit voor knooppunten, waarop niet direct een primair moment aangrijpt, aanvaardbaar. Bovenstaande formules kunnen voor een raamwerk, bestaande uit staven met constant traagheidsmoment, worden geschreven als in tek. 6 (alle O-waarden worden — 2 en de correctiefactor  $b'$  kan worden ingevoerd).

Bijzonder geval: ligger doorgaand over meer dan 2 steunpunten. Een ligger doorgaand over meer dan 2 steunpunten kan ontstaan uit een stijf raamwerk, waarvan de kolommen een stijfheid = 0 bezitten. Bestaat de ligger uit velden met verlopende traagheidsmomenten, dan geschiedt de berekening het eenvoudigst m. b. v. de draaiingsinvloeden van tek. 4 (zie toepassing III). Heeft elk veld van de ligger op zichzelf een constant traagheidsmoment, dan blijven de voor een stijf raamwerk opgestelde uitdrukkingen voor de eindmomenten, behorend bij een primair moment  $+M$  op een van de knooppunten, in principe ongewijzigd. Daar bij elk 'knooppunt' nu maar 2 staven samenkomen, is het echter mogelijk de formules van tek. 6 eenvoudiger te schrijven, terwijl tevens de reeds afgeleide correctie (4) kan worden toegepast (zie tek. 7).

Toepassing I

Hiervoor wordt gekozen het spant, dat op blz. 297 van de Ie druk van 'Staalconstructies\*' door ir. A. P. Potma en ir. J. E. de Vries staat vermeld en waarvoor bij belasting van regel AB met primaire momenten van  $pM_{AB} = +360$  kgm en  $pM_{BA} = -360$  kgm, is aangenomen, dat bij de punten D, H, J, KenL de momenten zo gering worden, dat zij kunnen worden verwaarloosd. Zie tek. 8 (de som van de verdelingscoëfficiënten rond één knooppunt = 0,50). De formules van tek. 4 worden toegepast.

Door primair moment  $pM_{AB} = +360$  kgm wordt:

$$D_{AB} = -0,3825 \times 360 \times \frac{1}{1-0,3825 \times 0,218 - 0,1175 \times 0,1095} = -153 \text{ kgm}$$

Door primair moment  $pM_{BA} = -360$  kgm wordt:

$$D_{BA} = +0,218 \times 360 \times \frac{1}{1-0,218 \times 0,3825 - 0,187 \times 0,187 - 0,095 \times 0,093} = -90 \text{ kgm}$$

Totaal door  $pM_{AB}$  en  $pM_{BA}$  samen:

$$D_{AB} = -153 - 90 \times \frac{0,3825}{1-0,1175 \times 0,1095} = -188 \text{ kgm}$$

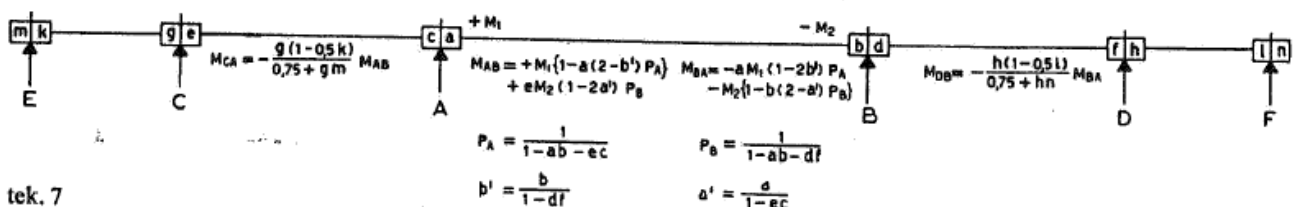
$$D_{BA} = +90 + 153 \times \frac{0,218}{1-0,187 \times 0,187 - 0,095 \times 0,093} = +125 \text{ kgm}$$

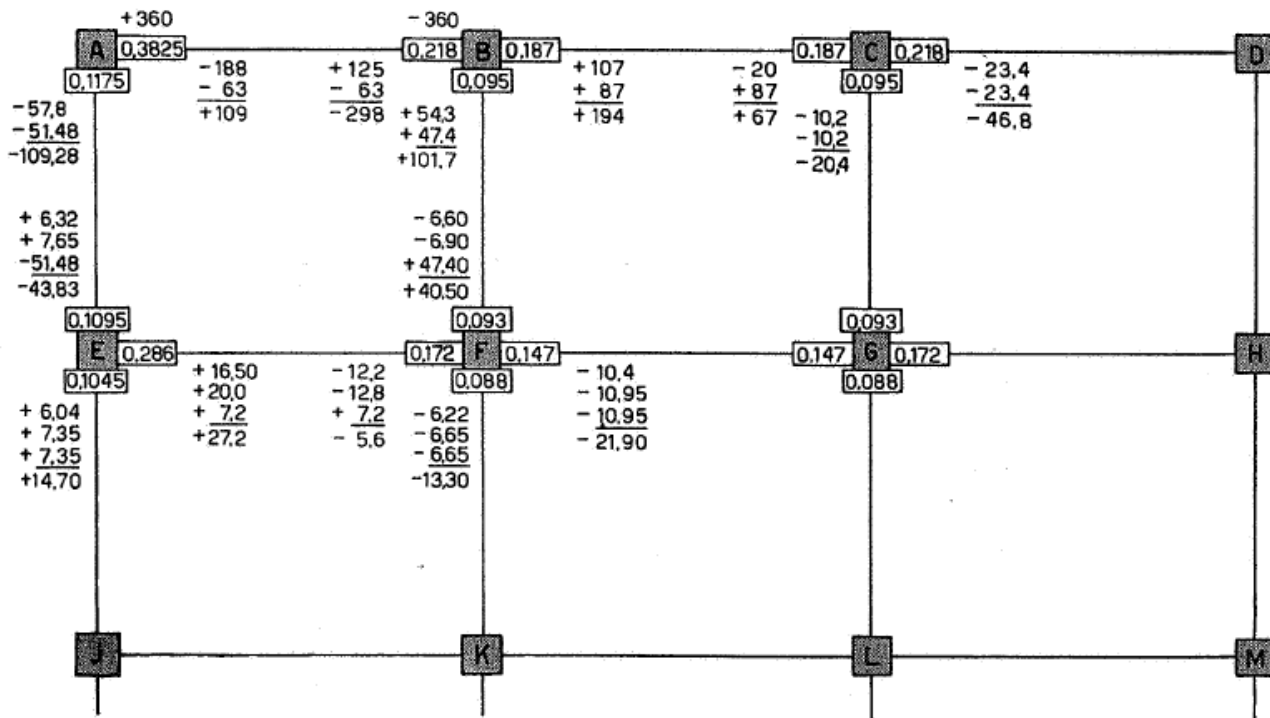
Nu kunnen ook de draaiingsinvloeden van de overige knooppunten worden ingeschreven op de volgens de me-

$$D_{AE} = -188 \times \frac{0,1175}{0,3825} = -57,8, \text{ enz.}$$

thode Kani gebruikelijke wijze:

Bij controle blijkt, dat de draaiingsinvloeden  $D^{\wedge}B^{\text{en}} \& BA$  inderdaad als eindwaarden kunnen worden beschouwd. Vervolgens worden de eindmomenten bepaald door de sommatie van de draaiingsinvloeden en de primaire momenten.





tek. 8

Het is natuurlijk ook mogelijk de verder afgelegen knooppunten in de berekening te betrekken.

Toepassing II

Voor hetzelfde spant met dezelfde belasting als gekozen voor toepassing I worden nu de formules van tek. 6 gebruikt.

$$P_A = \frac{1}{1 - 0,3825 \times 0,218 - 0,1175 \times 0,1095} = 1,107$$

$$P_B = \frac{1}{1 - 0,3825 \times 0,218 - 0,187 \times 0,187 - 0,095 \times 0,093} = 1,145$$

$$a' = \frac{0,3825}{1 - 0,1175 \times 0,1095} = 0,398$$

$$b' = \frac{0,218}{1 - 0,187 \times 0,187 - 0,095 \times 0,093} = 0,2285$$

Door primair moment  $pM_{AB}$  wordt:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= +360 \left\{ 1 - a(2 - b') \right\} P_A \left\{ = \right. \\ &= +360 \left\{ 1 - 0,3825(2 - 0,2285) \right\} 1,107 \left\{ = \right. \\ &= +89,5 \text{ kgm} \end{aligned}$$

Door primair moment  $pM_{BA}$  wordt:

$$\begin{aligned} M_{BA} &= -360 \left\{ 1 - b(2 - a') \right\} P_B \left\{ = \right. \\ &= -360 \left\{ 1 - 0,218(2 - 0,398) \right\} 1,145 \left\{ = \right. \\ &= -215,8 \text{ kgm} \end{aligned}$$

Totaal door  $pM_{AB}$  en  $pM_{BA}$  samen:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= +89,5 + b \times 360(1 - 2a') P_B = \\ &= 89,5 + 0,218 \times 360(1 - 2 \times 0,398) 1,145 = \\ &= +108 \text{ kgm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{BA} &= -215,8 - a \times 360(1 - 2b') P_A = \\ &= -215,8 - 0,3825 \times 360(1 - 2 \times 0,2285) 1,107 = \\ &= -299 \text{ kgm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{BC} &= +299 \times \frac{0,187(2 - 0,187)}{1 - 0,218(2 - 0,398)} \frac{1,145}{1,145} = \\ &= +195 \text{ kgm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{BF} &= +299 \times \frac{0,095(2 - 0,093)}{1 - 0,218(2 - 0,398)} \frac{1,145}{1,145} = \\ &= +104 \text{ kgm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{CB} &= +195 \times \frac{1 - 2 \times 0,187}{2 - 0,187} = \\ &= +67,4 \text{ kgm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{CD} &= -67,4 \times \frac{0,218}{0,5 - 0,187} = \\ &= -46,9 \text{ kgm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{CG} &= -67,4 \times \frac{0,095}{0,5 - 0,187} = \\ &= -20,4 \text{ kgm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{FB} &= +104 \times \frac{1 - 2 \times 0,093}{2 - 0,093} = \\ &= +44,4 \text{ kgm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{FG} &= -44,4 \times \frac{0,147}{0,5 - 0,093} = \\ &= -16,05 \text{ kgm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{FE} &= -44,4 \times \frac{0,172}{0,5 - 0,093} = \\ &= -18,8 \text{ kgm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{FK} &= -44,4 \times \frac{0,088}{0,5 - 0,093} = \\ &= -9,6 \text{ kgm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{EA} &= -108 \times \frac{1 - 2 \times 0,1095}{2 - 0,1095} = \\ &= -44,6 \text{ kgm} \end{aligned}$$

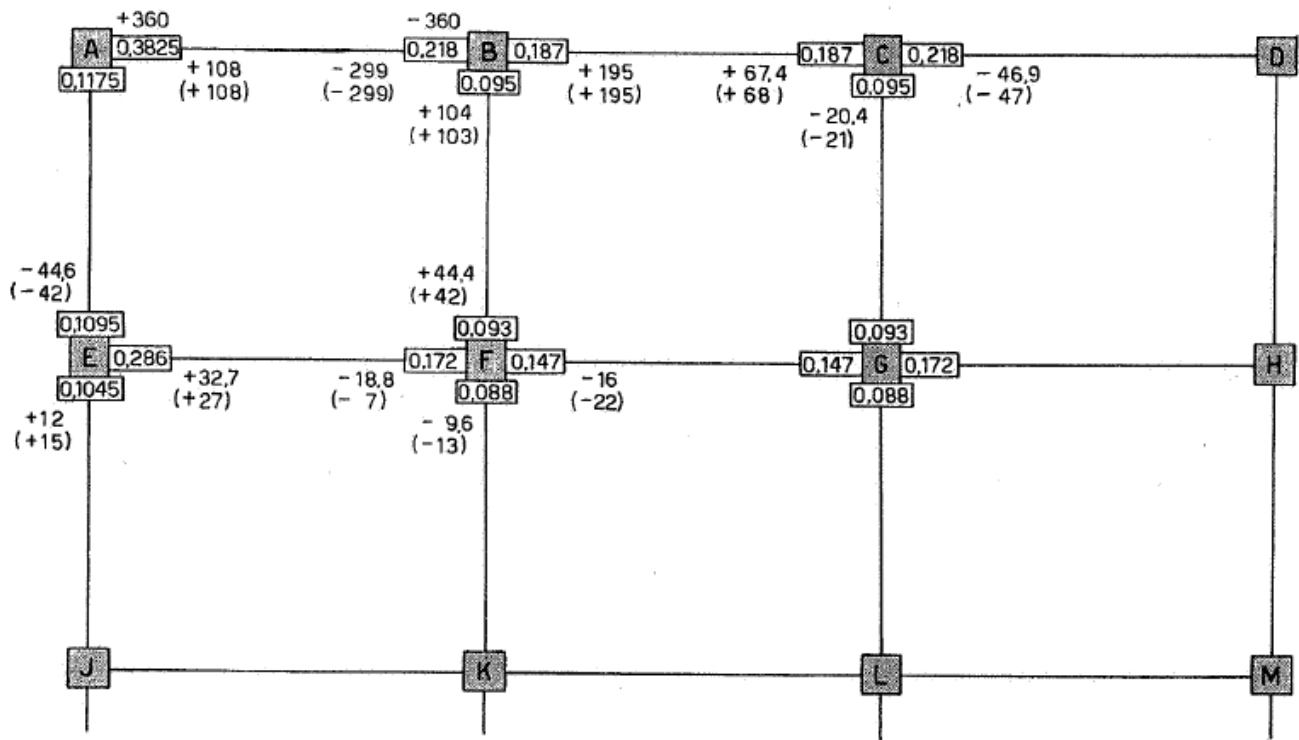
$$\begin{aligned} M_{EF} &= +44,6 \times \frac{0,286}{0,5 - 0,1095} = \\ &= +32,7 \text{ kgm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{EJ} &= +44,6 \times \frac{0,1045}{0,5 - 0,1095} = \\ &= +12,0 \text{ kgm} \end{aligned}$$

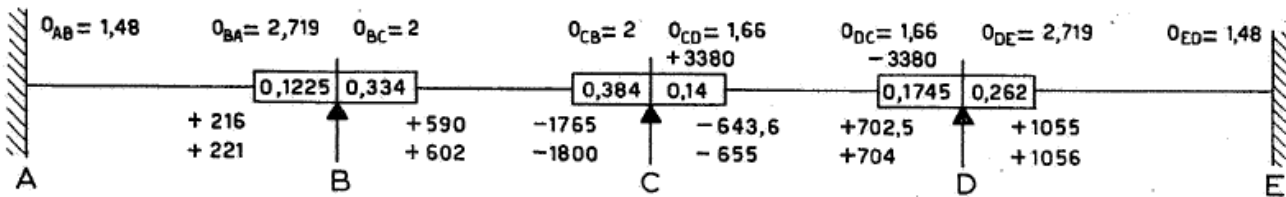
In tek. 9 zijn deze momenten genoteerd; ter vergelijking zijn tussen haakjes geplaatst de eindwaarden van een Cross-berekening. De afwijkingen blijken zeer gering te zijn. Voor de punten E en F zijn de afwijkingen het grootst, doch hieraan hoeft niet veel betekenis te worden toegekend, daar deze afwijkingen voornamelijk het gevolg zijn van het feit, dat de invloed, welke de punten J en F op elkaar uitoefenen, is verwaarloosd. De daardoor ontstane fout is echter van dezelfde orde van grootte, als die welke ontstaan is door het buiten beschouwing laten van de punten D, H, J, K, en L. Indien gewenst, kan door verdere toepassing van de formules ook deze invloed tot uiting worden gebracht.

Toepassing III

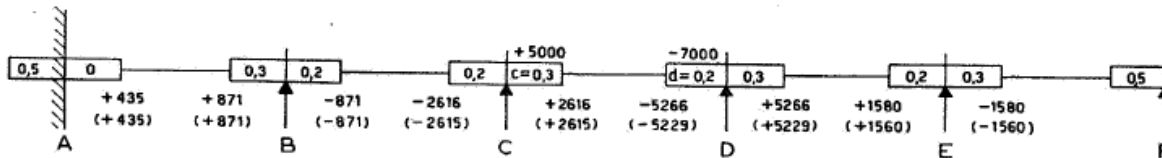
De ligger van tek. 10 wordt belast in veld CD, zodat primaire momenten ontstaan groot  $pM_{CD} = +3380$  kgm en  $pM_{DC} = -3380$  kgm.



tek. 9



tek. 10



tek. 11

De velden bezitten een niet constant traagheidsmoment. De O-waarden benevens de verdelingscoëfficiënten staan in de figuur aangegeven.

Met behulp van de formules uit tek. 4 wordt:

$$P_A = \frac{1}{1 - 0,14 \times 0,1745 - 0,384 \times 0,334} = 1,18$$

$$P_B = \frac{1}{1 - 0,14 \times 0,1745} = 1,025$$

$$D_{CD} = -3380 \times 0,14 \times 1,18 - 3380 \times 0,14 \times 0,1745 \times 1,025 = -643,6 \text{ kgm}$$

$$D_{DC} = +3380 \times 0,14 \times 0,1745 \times 1,18 + 3380 \times 0,14 \times 1,025 = +702,5 \text{ kgm}$$

Met behulp van deze draaiingsinvloeden kunnen nu de overige draaiingsinvloeden worden bepaald. Vervolgens is in tek. 10 nog eenmaal de Kani-bewerking toegepast om een betere benadering te verkrijgen. De eindmomenten worden nu als volgt:

$$M_{AB} = +221 \text{ kgm (+225 kgm)}$$

$$M_{BA} = +2,719 \times 221 =$$

$$= +601 \text{ kgm (+617 kgm)}$$

$$M_{BC} = +2 \times 602 - 1800 =$$

$$= -594 \text{ kgm (-617 kgm)}$$

$$M_{CB} = -2 \times 1800 + 602 =$$

$$= -2998 \text{ kgm (-2991 kgm)}$$

$$M_{CD} = +3380 - 1,66 \times 655 + 704 =$$

$$= +2996 \text{ kgm (+2991 kgm)}$$

$$M_{DC} = -3380 + 1,66 \times 704 - 655 =$$

$$= -2865 \text{ kgm (-2869 kgm)}$$

$$M_{DE} = +2,719 \times 1,056 =$$

$$= +2869 \text{ kgm (+2869 kgm)}$$

$$M_{ED} = +1056 \text{ kgm (+1056 kgm)}$$

De tussen haakjes geplaatste getallen geven de waarden aan, die met een Cross-bewerking zijn verkregen.

Toepassing IV

De ligger voorgesteld in tek. 11 wordt zodanig belast in veld CD, dat primaire momenten ontstaan  $pM_{CD} = +5000$  kgm en  $pM_{BC} = -7000$  kgm.

Elk veld van de ligger bezit een constant traagheidsmoment. De verdelingscoëfficiënten zijn in de figuur aangegeven. (vervolg op bh. 248)

Tallose proeven zijn en worden nog genomen om uit te maken, welk kunsthars of welke kunstharscombinatie in geëmulgeerde vorm nu in cementmengsels tot de beste resultaten kan leiden. In de USA meende men op zeker ogenblik, dat aan de co-polymeren butadiëen/styreen de voorkeur moest worden gegeven, doch uit latere publicaties bleek, dat men deze opvatting heeft laten varen en steeds meer terugkeert tot polyvinylacetaat of tot het co-polymeer vinylacetaat/vinylchloride. Enkele onderzoekers kwamen tot de overtuiging, dat polyvinylacetaat verreweg de voorkeur verdient, mits het maar in voldoende hoeveelheden aan de specie werd toegevoegd. Hiermede ontstond een nieuw bezwaar, daar deze kunsthars voor verwerking in grotere hoeveelheden te kostbaar werd. Zowel productie als verbruik van p.v.acetaat zijn intussen sterk gestegen en dit heeft de gebruikelijke prijsverlaging tot gevolg gehad.

Wij hebben reeds aangetoond, dat er een zekere verscheidenheid bestaat in de samenstelling van emulsies en dit geldt ook voor emulsies van een en dezelfde kunsthars. Men kan nu wel besluiten, dat voor verwerking in cementmengsels p.v.acetaat tot de beste resultaten leidt, doch hiermede zijn wij er nog niet. Men dient ook nog vast te stellen, welke deeltjesgrootte van de vaste stof, welke emulgator en welke pH de voorkeur verdienen. Daarnaast krijgt men nog de vaststelling van het juiste percentage emulsie, dat aan het mengsel cement/zand en water moet worden toegevoegd.

Een emulsie, waarmede opvallend goede resultaten werden bereikt, bezat de volgende eigenschappen :

aard ..... co-polymeervinylacetaat/vinylchloride  
vaste stof ..... 50%  
pH ..... 4,0 — 4,5  
deeltjesgrootte..... 2 — 4 µ

Cementmengsels, waarin een dergelijke emulsie werd verwerkt, bleken een treksterkte te bezitten, welke 3 tot 10 maal groter was dan met de gebruikelijke cementmengsels het geval was. Ook de samendrukbaarheid werd belangrijk vergroot. De thermoplastische kunsthars met een sterk bindend vermogen

hield onder vrijwel alle omstandigheden de delen van het droge, verharde cement bij elkaar.

De aanwezigheid van p.v.acetaat in cementmengsels bleek ook nog een ander voordeel te bezitten. De mengsels, waaraan de kunsthars was toegevoegd, bleken een veel grotere chemische bestendigheid te hebben, d.w.z. zij waren na afbinden veel minder gevoelig voor de inwerking van chemicaliën. Het behoeft geen betoog, dat deze ervaring zeer interessant is ten opzichte van industriële toepassingen.

Voor de verwerking van cement en kunstharsen bestaan er verschillende methoden en deze kunnen als volgt worden ingedeeld:

- A. toevoeging van het mengsel cement/zand aan een verdunde kunstharsemulsie;
- B. toevoeging van een kunstharsemulsie aan het water, waarmede de specie wordt aangemaakt.

Met beide methoden zijn goede resultaten bereikt, doch men dient nauwkeurig te weten, op welke wijze men tewerk dient te gaan. Hiervoor bestaan diverse richtlijnen, doch wij moeten deze thans buiten beschouwing laten.

De besproken kunstharsen hebben een grote verenigbaarheid met vele andere stoffen; hiervan heeft men vooral gebruik gemaakt bij het maken van zgn. naadloze vloeren. Dergelijke vloeren kunnen bestaan uit een mengsel van cement, zand, vulstoffen, kleurstoffen en water. Vooral hierbij is het van groot belang, de juiste verhouding van de verschillende bestanddelen te vinden. Er zijn wel enkele suggesties te geven, doch in het algemeen is dit toch het geheim van de smid, dat na langdurige experimenteren door de fabrikanten van de vloeren is ontsluierd en natuurlijk niet wordt prijsgegeven.

Uit het bovenstaande blijkt wel, dat elke belanghebbende, die overweegt kunstharsen in cementmengsels te gaan verwerken, dient te gaan beginnen met het nemen van uitgebreide proefnemingen. Momenteel is het gebruik van kunstharsen in cementmengsels nog beperkt tot speciale toepassingen, doch men kan met recht en reden verwachten, dat zij wellicht reeds in de nabije toekomst belangrijke uitbreidingen zullen ondergaan.



(vervolg van blz. 256)

Met behulp van de formules uit tek. 7 blijkt:

$$P_C = \frac{1}{1 - 0,3 \times 0,2 - 0,2 \times 0,2} = 1,110$$

$$P_D = \frac{1}{1 - 0,2 \times 0,3 - 0,3 \times 0,2} = 1,137$$

$$c' = \frac{0,3}{1 - 0,2 \times 0,2} = 0,3125$$

$$d' = \frac{0,2}{1 - 0,3 \times 0,2} = 0,213$$

Door  $pM_{CD} = + 5000$  kgm wordt:

$$M_{CD} = + 5000 \left\{ 1 - 0,3 (2 - 0,213) 1,11 \right\} = + 2020 \text{ kgm}$$

$$M_{DC} = - 0,3 \times 5000 (1 - 2 \times 0,213) 1,11 = - 956 \text{ kgm}$$

Door  $pM_{DC} = - 7000$  kgm wordt:

$$M_{DC} = - 7000 \left\{ 1 - 0,2 (2 - 0,3125) 1,137 \right\} = - 4310 \text{ kgm}$$

$$M_{CD} = + 0,2 \times 7000 (1 - 2 \times 0,3125) 1,137 = + 596 \text{ kgm}$$

totaal:

$$M_{CD} = + 2020 + 596 = + 2616 \text{ kgm}$$

$$M_{DC} = - 956 - 4310 = - 5266 \text{ kgm}$$

$$M_{BC} = - 2616 \times \frac{0,3 (1 - 0,5 \times 0)}{0,75 + 0,3 \times 0,5} =$$

$$M_{BC} = - 871 \text{ kgm}$$

$$M_{AB} = + \frac{1}{2} \times 871 = + 435 \text{ kgm}$$

$$M_{ED} = + 5266 \times \frac{0,3 (1 - 0,5 \times 0,5)}{0,75 + 0,3 \times 0} = + 1580 \text{ kgm}$$

Deze waarden zijn genoteerd in tek. 11, waar de tussen haakjes geplaatste getallen de momenten aangeven, die met een volledige Cross-berekening worden gevonden. De afwijkingen hebben voor een normale betonconstructie geen betekenis (nl. voor punt E ca 1,3%, voor punt □ ca 0,7% en voor de overige punten 0%).

Opmerkingen

1. Bij de toepassing van alle afgeleide formules moet er met het opstellen van het schema met de verdelingscoëfficiënten steeds rekening gehouden worden met de omstandigheid, dat alle staven moeten worden beschouwd als aan beide zijden volledig ingeklemd. Een scharnier of een volledige inklemming moet in het betreffende punt door een bijpassende verdelingscoëfficiënt tot uiting worden gebracht, zoals ook in de toepassingen is gedemonstreerd, zonder dat enige andere verdelingscoëfficiënt een wijziging ondergaat.
2. Ondanks de vrij grote vormen, die de formules aannemen, lenen zij zich goed voor een snelle becijfering, daar bepaalde producten, die in een formule als onderdeel voorkomen, ook in de andere formules blijken voor te komen. Bovendien kunnen zij met grote nauwkeurigheid met behulp van een rekenlineaal worden becijferd.